Exercice 1
On considère la fonction définie par : pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2(1+x)} - \ln(1+x)$$

.

1. Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variations de f.
2. En déduire successivement que :

$$\forall x \geqslant 0, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

puis à l'aide d'intégrales :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$$

3. Soient n, p, k des entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant 2, k \geqslant 2$
   (a) A l'aide d'une minoration de $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$, montrer que

$$\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}$$

   (b) Déduire des résultats qui précèdent l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} f(\frac{1}{k}) \leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}$$

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1 .... U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

1. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche?
2. On choisit une urne au hasard et on tire une boule. Celle-ci est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré la boule dans l'urne U_k ($k \in [\![0; n]\!]$)?
3. On choisit une urne au hasard et on tire successivement et avec remise 2 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches ?
4. Reprendre la question précédente en supposant que le tirage se fait sans remise.