On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
2. Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$.
   - **a.** Quelle est la parité de g ?
   - **b.** Calculer explicitement $g(x)$. On pourra distinguer les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
   - **c.** Quel est le plus grand entier n tel que g soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$?
   - **d.** Montrer que $g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.
4. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

   On considère la fonction φ_x définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[$, $\varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt$.
   - **a.** Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.
   - **b.** Montrer : $\quad \forall (u,v) \in [0, +\infty[^2, \quad u < v \Rightarrow \left(\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\,dt\right)$.
     En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   - **c.** On admet que φ_x est continue sur $[0, +\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$.

   On note $U : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0, +\infty[$, associe $U(x)$, l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$.

   Ainsi, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.
5.
   - **a.** Vérifier, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$: $\quad U(x) = 1 - x$.
   - **b.** Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, montrer : $\quad \varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geqslant 0$, et en déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.
6.
   - **a.** Montrer que l'application U est continue sur $[0, +\infty[$.
   - **b.** Étudier la dérivabilité de U sur $[0, +\infty[$
   - **c.** Tracer l'allure de la courbe représentative de U.

---

7. On considère la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} & = & U(a_n) \end{cases}$$

   - **a.** Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   - **b.** Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
   - **c.** En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.