## Problème B

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel $t$, par :

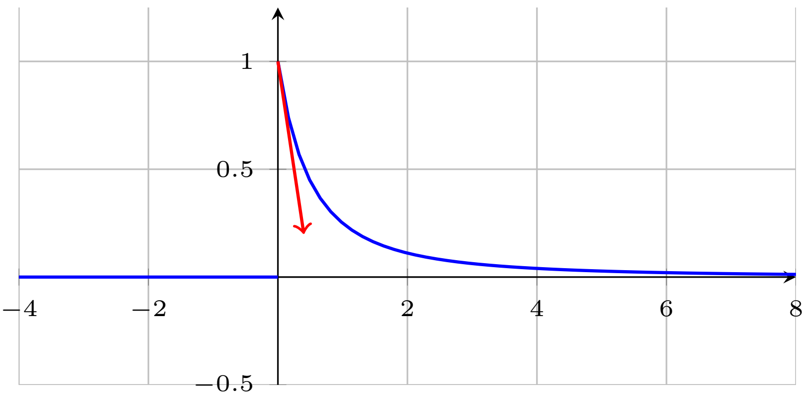
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

***1.*** Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

*Démonstration.*
Sur $]-\infty, 0]$, la fonction $f$ est constante.

Sur $]0, +\infty[$, la fonction $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ car est l'inverse de la fonction $t \mapsto (1+t)^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ (car polynomiale) **et qui ne s'annule pas sur cet intervalle**.

- Soit $t > 0$. $f'(t) = ((1+t)^{-2})' = -2\ (1+t^2)^{-3} = -\dfrac{2}{(1+t)^3}$.
- Comme $1+t > 0$, $(1+t)^3 > 0$ et $f'(t) < 0$ sur $]0, +\infty[$.
  La fonction $f$ est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
- Enfin, comme et $f'_d(0) = -2$, la fonction $f$ a pour demi-tangente à droite en 0 la droite d'équation $y = 1 - 2x$.




□

***2.*** Pour $x$ dans $\mathbb{R}$, on note $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\, dt$.

***a.*** Quelle est la parité de $g$ ?

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g(-x) = \int_{x}^{-x} f(t)\ dt = -\int_{-x}^{x} f(t)\ dt = -g(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est impaire.}}$$

□

***b.*** Calculer explicitement $g(x)$. On pourra distinguer les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \geqslant 0$ :
  La fonction $f$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par définition :
  $$g(x) \;=\; \int_{-x}^{x} f(t)\ dt \;=\; \int_{-x}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{x} \tilde{f}(t)\ dt$$
  où $\tilde{f}$ est la fonction $f_{|]0,+\infty[}$ qui a été prolongée par continuité en 0.
  Plus précisément :
  × pour tout $t \in [-x,0]$, $f(t) = 0$,
  × pour tout $t \in [0,x]$, $\tilde{f}(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} = (1+t)^{-2}$.
  $$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-x}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{x} f(t)\ dt \;=\; \int_{-x}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} (1+t)^{-2}\ dt \;=\; \left[\ \frac{(1+t)^{-1}}{-1}\ \right]_0^x \\ &= -\left[\ \frac{1}{1+t}\ \right]_0^x \;=\; -\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) \;=\; -\left(\frac{\cancel{1} - \cancel{1} - x}{1+x}\right) \;=\; \frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

- Si $x < 0$ :
  Alors $-x > 0$. On en déduit, par parité :
  $$g(x) \;=\; -g(-x) \;=\; -\left(\frac{-x}{1-x}\right) \;=\; \frac{x}{1-x}$$

$$\boxed{\begin{array}{rccl} g & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\[2ex] \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$$

□

***c.*** Quel est le plus grand entier $n$ tel que $g$ soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ ?

*Démonstration.*

- La fonction $g$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
  En effet :
  × $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ est $\mathcal{C}^0$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-\infty,0[$ car est un quotient de deux fonctions polynomiales **dont le dénominateur ne s'annule pas**,
  × de même, $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est $\mathcal{C}^0$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0,+\infty[$,
  × $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \;=\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-x} \;=\; 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \;=\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+x} \;=\; 0$ et $g(0) = 0$.
- La fonction $g$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  Tout d'abord, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ car :
  × elle est dérivable sur $]-\infty,0[ \cup ]0,+\infty[$ d'après ce qui précède,
  × si $x < 0$, on a : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \;=\; \dfrac{\frac{x}{1-x}}{x} \;=\; \dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = g'_g(0)$,
  × si $x > 0$, on a : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \;=\; \dfrac{\frac{x}{1+x}}{x} \;=\; \dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = g'_d(0)$,

Déterminons la dérivée de $g$ :

× si $x < 0$, $\quad g'(x) \ = \ \dfrac{(1-x) - x\ (-1)}{(1-x)^2} \ = \ \dfrac{1}{(1-x)^2}$

× si $x > 0$, $\quad g'(x) \ = \ \dfrac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \ = \ \dfrac{1}{(1+x)^2}$

× $g'(0) \ = \ 1$ par ce qui précède.

Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} g'(x) \ = \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{(1-x)^2} \ = \ 1 \ = \ g'(0) \ = \ 1 \ = \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{(1-x)^2} \ = \ \lim\limits_{x \to 0^+} g'(x)$, la fonction $g'$ est continue en 0 et donc continue sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.

- La fonction $g$ n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En effet :

× si $x < 0$, on a :

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} \ = \ \frac{\frac{1}{(1-x)^2} - 1}{x} \ = \ \frac{1 - (1-x)^2}{x(1-x)^2} \ = \ \frac{2x - x^2}{x(1-x)^2} \ = \ \frac{2 - x}{(1-x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2 = g''_g(0)$$

× si $x > 0$, on a :

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} \ = \ \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - 1}{x} \ = \ \frac{1 - (1+x)^2}{x(1+x)^2} \ = \ \frac{-2x - x^2}{x(1+x)^2} \ = \ \frac{-2 - x}{(1-x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -2 = g''_d(0)$$

Ainsi, $g'$ n'est pas dérivable en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ mais pas } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

□

***d.*** Montrer que $g(x)$ tend vers 1 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

*Démonstration.*
Soit $x > 0$.

$$g(x) \ = \ \frac{x}{1+x} \ = \ \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \ \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} g(x) \ = \ 1.}$$

□

***3.*** Déterminer un réel positif $\alpha$ tel que $\displaystyle\int_0^\alpha f(t)\, dt = \frac{1}{2}$.

*Démonstration.*
Soit $\alpha \geqslant 0$.

$$\int_0^\alpha f(t)\ dt \ = \ \int_0^\alpha \frac{1}{(1+t)^2}\ dt \ = \ -\left[\ \frac{1}{1+t}\ \right]_0^\alpha \ = \ -\left(\frac{1}{1+\alpha} - 1\right) \ = \ \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\boxed{\text{Pour } \alpha = 1, \text{ on a } \int_0^\alpha f(t)\ dt \ = \ \frac{1}{2}.}$$

□

*4.* Soit $x \in [0,+\infty[$ fixé.

On considère la fonction $\varphi_x$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $\forall u \in [0,+\infty[,\ \varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt$.

***a.*** Calculer $\varphi_x(0)$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi_x(u)$.

*Démonstration.*
Soit $x \in [0,+\infty[$.

- $\varphi_x(0) \ = \ \displaystyle\int_x^x f(t)\ dt \ = \ 0.$
- Soit $u \in [0,+\infty[$ tel que $u \geqslant x$ *(permet d'assurer $x+u \geqslant 0$ et $x-u \leqslant 0$).*

$$\begin{aligned}\varphi_x(u) \ &= \ \int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt \ = \ \int_{x-u}^{0} f(t)\ dt + \int_0^{x+u} f(t)\ dt \ = \ 0 - \left[\ \frac{1}{t+1}\ \right]_0^{x+u} \\ &= \ -\left(\frac{1}{x+u+1} - 1\right) \ = \ 1 - \frac{1}{x+u+1} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 \ = \ 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_x(0) \ = \ 0 \text{ et } \lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u) \ = \ 1.}$$

□

***b.*** Montrer : $\quad \forall (u,v) \in [0,+\infty[^2, \quad u < v \ \Rightarrow \ \left(\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt\right)$.
En déduire que $\varphi_x$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

*Démonstration.*
Soit $(u,v) \in [0,+\infty[^2$, tel que $u < v$.

- Tout d'abord, on a :

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \ = \ \int_{x-v}^{x+v} f(t)\ dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt \ = \ \int_{x+u}^{x-u} f(t)\ dt + \int_{x-v}^{x+v} f(t)\ dt$$

Or, par la relation de Chasles :

$$\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt \ = \ \int_{x+u}^{x-u} f(t)\ dt + \int_{x-u}^{x-v} f(t)\ dt + \int_{x-v}^{x+v} f(t)\ dt$$

On en déduit que :

$$(\varphi_x(v) - \varphi_x(u)) - \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt \ = \ -\int_{x-u}^{x-v} f(t)\ dt \ = \ \int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt$$

Enfin, comme $u < v$, on a $-v < -u$ et ainsi $x - v < x - u$.
La fonction $f$ étant positive, $\displaystyle\int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (u,v) \in [0,+\infty[^2, \quad u < v \ \Rightarrow \ \left(\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt\right).}$$

- Comme $x \geqslant 0$, $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$, $[x+u,\, x+v] \subset [0,+\infty[$. Or, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\ f(t) > 0$.
On en déduit que $\displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } u < v,\ \varphi_x(v) > \varphi_x(u). \text{ La fonction } \varphi_x \text{ est donc strictement croissante.}}$$

□

***c.*** On admet que $\varphi_x$ est continue sur $[0,+\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $u$, admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$.

*Démonstration.*
La fonction $\varphi_x$ est :

× continue sur $[0,+\infty[$,

× strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $\varphi_x([0,+\infty[) = [\varphi_x(0), \lim\limits_{u\to+\infty} \varphi_x(u)[ = [0,1[$.

$$\boxed{\text{Comme } \dfrac{1}{2} \in [0,1[\text{, on en déduit que l'équation } \varphi_x(u) = \dfrac{1}{2} \text{ admet une unique solution } u \in [0,+\infty[.}$$

□

On note $U : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0,+\infty[$, associe $U(x)$, l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\, dt = \frac{1}{2}$.

***5. a.*** Vérifier, pour tout $x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right[$ : $U(x) = 1-x$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right[$.

- $1-x \in \left]\dfrac{1}{2},1\right] \subset [0,+\infty[$.
- Il suffit donc de vérifier que $1-x$ est solution de $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$ *i.e.* que $\varphi_x(1-x) = \dfrac{1}{2}$.
L'unicité d'une telle solution permettra alors de conclure que $1-x = U(x)$. Or :

$$\varphi_x(1-x) = \int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)\, dt = \int_{2x-1}^{1} f(t)\, dt = \int_{2x-1}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{1} f(t)\, dt$$

Comme $2x-1 \in [-1,0[$, $f(t) = 0$ sur cet intervalle.
On en déduit que : $\displaystyle\int_{2x-1}^{0} f(t)\, dt = 0$ et ainsi :

$$\varphi_x(1-x) = \int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\, dt = -\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[, \quad U(x) = 1-x.}$$

□

***b.*** Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, montrer : $\varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geqslant 0$.
En déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\varphi_x(x) &= \int_{x-x}^{x+x} f(t)\, dt = \int_0^{2x} f(t)\, dt = \int_0^{2x} \frac{1}{(1+t)^2}\, dt = -\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^{2x} \\ &= -\left(\frac{1}{1+2x} - 1\right) = 1 - \frac{1}{1+2x}\end{aligned}$$

  Comme $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, $2x+1 \geqslant 2 > 0$ et $\dfrac{1}{2x+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$. D'où : $-\dfrac{1}{2x+1} \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

  $$\boxed{\text{Et enfin : } \varphi_x(x) = 1 - \frac{1}{2x+1} \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- On a démontre : $\varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2} = \varphi_x(U(x))$.
  Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $\varphi_x^{-1} : [0,1[ \to [0, +\infty[$ est strictement croissante.

  $$\boxed{\text{En appliquant la fonction } \varphi_x^{-1} \text{ de part et d'autre de l'inégaligé, on obtient : } x \geqslant U(x).}$$

- Par définition, $U(x)$ est la solution de l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$.
  Comme $x \geqslant U(x)$, $x - U(x) \geqslant 0$ et $x + U(x) \geqslant 2U(x) \geqslant 0$ par définition.
  Ainsi, $[x - U(x), x + U(x)] \subset [0, +\infty[$ et pour tout $t \in [x - U(x), x + U(x)]$, $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$.
  Et :

$$\begin{aligned}\varphi_x(U(x)) &= \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\, dt = \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} \frac{1}{(1+t)^2}\, dt \\ &= -\left[\frac{1}{1+t}\right]_{x-U(x)}^{x+U(x)} = -\left(\frac{1}{(1+x)+U(x)} - \frac{1}{(1+x)-U(x)}\right) \\ &= -\frac{((\cancel{1+x}) - U(x)) - ((\cancel{1+x}) + U(x))}{(1+x)^2 - U(x)^2} = \frac{2\, U(x)}{(1+x)^2 - U(x)^2}\end{aligned}$$

  Enfin :

$$\begin{aligned}\varphi_x(U(x)) = \frac{1}{2} \;&\Leftrightarrow\; \frac{2\, U(x)}{(1+x)^2 - U(x)^2} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 4\, U(x) = (1+x)^2 - U(x)^2 \\ &\Leftrightarrow\; U(x)^2 + 4\, U(x) - (1+x)^2 = 0\end{aligned}$$

  La quantité $U(x)$ est donc la solution positive du polynôme $P(X) = X^2 + 4\, X - (1+x)^2$.
  Le discriminant réduit de $P$ est $\Delta' = 2^2 + (1+x)^2$. Ainsi, $P$ admet pour racines :

$$u_1 = -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2} \quad \text{et} \quad u_2 = -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2}$$

  $$\boxed{\text{On en déduit que : } U(x) = -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2}}$$

□

***6. a.*** Montrer que l'application $U$ est continue sur $[0,+\infty[$.

*Démonstration.*
D'après ce qui précède :

$$U : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right[ \\ -2+\sqrt{4+(1+x)^2} & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

- La fonction $U$ est continue sur $[0,\frac{1}{2}[$ car polynomiale sur cet intervalle.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{4+(1+x)^2}$ est continue sur $]\frac{1}{2},+\infty[$ car est la composée de :
  × $g : x \mapsto 4+(1+x^2)$ conitnue sur $]\frac{1}{2},+\infty[$ et telle que $g(\,]\frac{1}{2},+\infty[\,) \subset [0,+\infty[$,
  × $h : x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $[0,+\infty[$.

  Ainsi, $U$ est continue sur $]\frac{1}{2},+\infty[$.
- La fonction $U$ est continue en $\dfrac{1}{2}$. En effet :
  × $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} U(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 1-x = \dfrac{1}{2}$
  × $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} U(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} -2+\sqrt{4+(1+x)^2} = -2+\sqrt{4+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = -2+\sqrt{\dfrac{25}{4}} = -2+\dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$
  × $U\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La fonction } U \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

□

***b.*** Étudier la dérivabilité de $U$ sur $[0,+\infty[$

*Démonstration.*
En reprenant la démonstration précédente, on prouve aisément que $U$ est dérivable (même $\mathcal{C}^\infty$) sur $[0,\frac{1}{2}[\,\cup\,]\frac{1}{2},+\infty[$ *(il faut noter que $g(]\frac{1}{2},+\infty[) \subset ]0,+\infty[$, intervalle sur lequel $h$ est $\mathcal{C}^\infty$).*

- si $x < \frac{1}{2}$ : $\dfrac{U(x)-U(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{1-x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}-x}{x-\frac{1}{2}} = -1 \underset{x\to\frac{1}{2}}{\longrightarrow} -1$,
- si $x > \frac{1}{2}$ : $\dfrac{U(x)-U(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{-2+\sqrt{4+(1+x)^2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{-\frac{5}{2}+\sqrt{4+(1+x)^2}}{x-\frac{1}{2}}$. Or :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4+(1+x)^2}-\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}} &= \frac{\left(\sqrt{4+(1+x)^2}-\frac{5}{2}\right)\left(\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}\right)}{(x-\frac{1}{2})\left(\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}\right)} \\ &= \frac{4+(1+x)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}{(x-\frac{1}{2})\left(\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}\right)}\end{aligned}$$

Intéressons-nous en particulier au dénominateur.

$$\begin{aligned} 4+(1+x)^2-\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 &= 4-\left(\tfrac{5}{2}\right)^2+(1+x)^2 \\ &= 4-\tfrac{25}{4}+1+2x+x^2 \;=\; -\tfrac{5}{4}+2x+x^2 \;=\; \left(x-\tfrac{1}{2}\right)\left(x+\tfrac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{U(x)-U(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} \;=\; \frac{\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}\right)} \;=\; \frac{x+\frac{5}{2}}{\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}} \underset{x\to\frac{1}{2}}{\longrightarrow} \frac{3}{5}$$

$$\boxed{\text{Comme } U'_g(\tfrac{1}{2})=-1 \;\neq\; \tfrac{3}{5}=U'_d(\tfrac{1}{2}), \text{ la fonction } U \text{ n'est pas dérivable en } \tfrac{1}{2}.}$$

□

***c.*** Tracer l'allure de la courbe représentative de $U$.

*Démonstration.*

- Notons $v : x \mapsto -2+\sqrt{4+(1+x)^2}$. Pour $x \geqslant \frac{1}{2}$ :

$$v'(x) \;=\; \frac{1}{\cancel{2}\,\sqrt{4+(1+x)^2}}\,\cancel{2}\,(1+x) \;=\; \frac{1+x}{\sqrt{4+(1+x)^2}} > 0$$

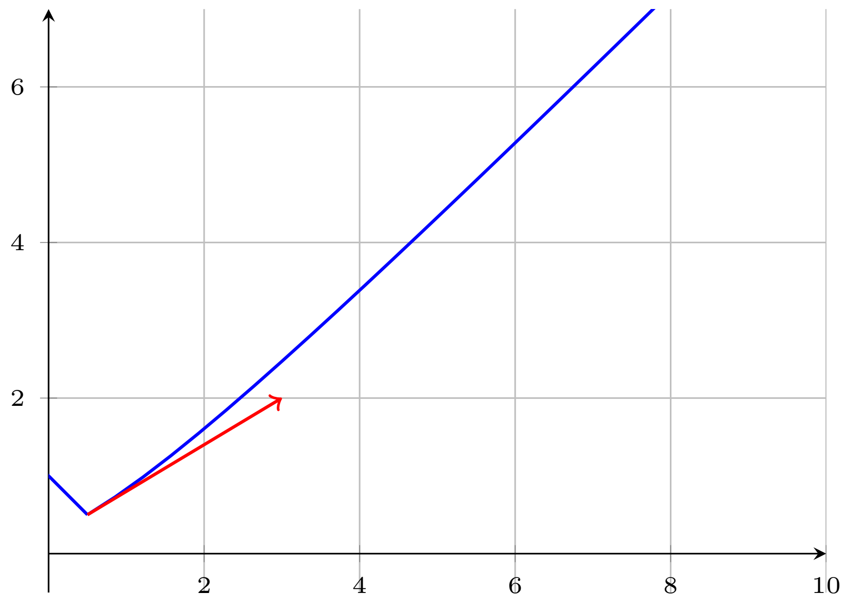
  Ainsi, la fonction $v$ est strictement croissante sur $[\frac{1}{2},+\infty[$.

- D'autre part, comme $4+(1+x)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\sqrt{4+(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} v(x) \;=\; +\infty$$

- La courbe représentative de $U$ admet pour demi-tangente à droite, la droite d'équation :

$$y=\frac{3}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$




□

***7.*** On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} & = & U(a_n) \end{array}\right.$$

***a.*** Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

*Démonstration.*

- On a démontré précédemment que $v$ est strictement croissante.
  Donc, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ : $U(x) \geqslant U(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ *(autrement dit* $[\frac{1}{2}, +\infty[$ *est stable par* $U$*).*
- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ : $a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

  *1)* **Initialisation** :
  $a_0 = 1 \geqslant \dfrac{1}{2}$ ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

  *2)* **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $a_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$).
  Par hypothèse de récurrence : $a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
  La fonction $U$ étant croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, on obtient :

$$a_{n+1} \;=\; U(a_n) \;\geqslant\; U\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{1}{2}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant \frac{1}{2}.}$$

□

***b.*** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ : $a_{n+1} \leqslant a_n$.

*1)* **Initialisation** :
$a_1 \;=\; U(a_0) \;=\; U(1) \;=\; -2 + \sqrt{4 + (1+1)^2} \;=\; -2 + \sqrt{8} \;\leqslant\; 1$.
En effet : $-2 + \sqrt{8} \leqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{8} \leqslant 3$.
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

*2)* **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $a_{n++2} \leqslant a_{n+1}$).
Par hypothèse de récurrence : $a_{n+1} \geqslant a_n$.
D'après la question précédente, $a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $a_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$. La fonction $U$ étant croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, on obtient :

$$a_{n+2} \;=\; U(a_{n+1}) \;\leqslant\; U(a_n) \;=\; a_{n+1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leqslant a_n. \text{ Ainsi, } (a_n) \text{ est décroissante.}}$$

□

***c.*** En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.

*Démonstration.*

- La suite $(a_n)$ est décroissante et minorée par $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (a_n) \text{ est convergente et que sa limite } \ell \text{ vérifie } \ell \geqslant \tfrac{1}{2}.}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = U(a_n)$.
La fonction $U$ étant continue, on en déduit, par théorème de composition :

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & U(a_n) \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} \\ \ell & = & U(\ell) \end{array}$$

Ainsi, $\ell$ est un point fixe de $U$.

- Déterminons les points fixes de $U$.
  × Si $x \in [0,\frac{1}{2}[$ : $U(x) = 1-x$.

$$U(x) = x \Leftrightarrow 1-x = x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

  Ainsi, $U$ n'admet pas de point fixe sur $[0,\frac{1}{2}[$.

  × Si $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ : $U(x) = -2+\sqrt{4+(1+x)^2}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} U(x)-x & = & -2+\sqrt{4+(1+x)^2}-x \;=\; \sqrt{4+(1+x)^2}-(2+x) \\ & = & \dfrac{(\sqrt{4+(1+x)^2}-(2+x))(\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x))}{\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x)} \\ & = & \dfrac{4+(1+x)^2-(2+x)^2}{\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x)} \;=\; \dfrac{\cancel{4}+1+2x+\cancel{x^2}-\cancel{4}-4x-\cancel{x^2}}{\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x)} \\ & = & \dfrac{1-2x}{\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x)} \end{array}$$

  Ainsi : $\quad U(x) = x \Leftrightarrow U(x)-x = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
  et $U$ admet $\dfrac{1}{2}$ comme unique point fixe sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \ell = \frac{1}{2}, \text{ unique point fixe de } U.}$$

□