Exercice 1
On considère la fonction définie par : pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2(1+x)} - \ln(1+x)$$

.

1. Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variations de f.
2. En déduire successivement que :

   $$\forall x \geqslant 0, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

   puis à l'aide d'intégrales :

   $$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$$

3. Soient n, p, k des entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant 2, k \geqslant 2$
   (a) A l'aide d'une minoration de $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$, montrer que

   $$\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}$$

   (b) Déduire des résultats qui précèdent l'inégalité suivante :

   $$0 \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} f(\frac{1}{k}) \leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}$$

Exercice 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie n. On suppose que f est nilpotent, c'est à dire qu'il existe un entier k tel que $f^k = 0$

1. Montrer que f n'est pas bijective
2. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$ et x_0 ∈E tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$
   (a) Montrer que $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre de E
   (b) En déduire que $p \leq n$