Exercice 1
Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 6u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 4v_n \end{array} \right.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice J telle que $A = 5I_2 + J$
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n$
4. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 2
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose de trois urnes notées A, B et V.
Chaque urne contient exactement n jetons indiscernables au toucher et numérotés de 1 à n.
On pioche simultanément un jeton dans chaque urne.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On note :

- A_k l'événement : « Le jeton prélevé dans l'urne A porte le nombre k. »
- B_k l'événement : « Le jeton prélevé dans l'urne B porte le nombre k. »
- V_k l'événement : « Le jeton prélevé dans l'urne V porte le nombre k. »

On note R l'événement : « Le jeton prélevé dans l'urne V porte un nombre égal à la somme des nombres obtenus au cours des tirages effectués dans les urnes A et B. »
Soit $k \in [\![2;2n]\!]$. On note S_k l'événement: « La somme des nombres obtenus au cours des tirages effectués dans les urnes A et B est égale à k.»

1. Déterminer les probabilités des événements S_2, S_3 et S_{2n-1}.
2. Soit $k \in [\![2;2n]\!]$, justifier que $P(S_k) = \dfrac{k-1}{n^2}$ puis calculer $P_{S_k}(R)$
3. Calculer la probabilité de l'événement R.