Vous traiterez l'exercice 1 et l'exercice 2. Vous présenterez les deux exercices, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 30 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ

Exercice 1

Soit n un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

Une urne contient, une boule numéro 1, 2 boules numéros 2, 3 boules numéro 3, ... n boules numéros n.

On effectue deux tirages successifs et sans remise dans cette urne.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note A_i , l'événement :"On obtient une boule numéro i au tirage numéro 1."

On note H l'événement :"La boule obtenue lors du premier tirage porte un numéro strictement supérieur au numéro de la boule obtenue lors du deuxième tirage".

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_i, pour tout entier naturel $i \in [\![1;n]\!]$.
2. Justifier que : $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad P_{A_i}(H) = \dfrac{i(i-1)}{(n-1)(n+2)}$.
3. En déduire la probabilité de l'événement H.

Exercice 2

Dans cet exercice, $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Soit la suite u définie par $u_0 = \cos(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \cos(\frac{x}{2^{n+1}})$

1. Montrer que la suite u est convergente.
2. On rappelle que $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$ pour tout réel a. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin(\frac{x}{2^n})$ est géométrique.
3. Qu'en déduit-on pour la suite u.