1 Définitions et règles de calcul

1.1 Définitions

Définition 1 : Un polynôme (ou fonction polynomiale) à coefficients réels est une fonction P de la forme :

$$P : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \end{array}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$ (qui sont appelés les coefficients de P).

Exemple : La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^3 + 3x^2 + 5 \end{array}$ ou encore la fonction réelle h constante égale à 6.

Remarque : L'expression $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ peut aussi s'écrire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ avec la convention $x^0 = 1$ (convention que l'on utilisera dans tout le reste du chapitre).

Définition 2 : Si P est un polynôme et s'écrit $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$, alors le nombre n est appelé le degré de P, noté $\deg(P)$ ou $d^\circ(P)$, et a_n est appelé le coefficient dominant de P. Si P est le polynôme nul, alors par convention $\deg(P) = -\infty$. Un polynôme dont le coefficient dominant est égal à 1 est dit unitaire.

Exemple : Le polynôme f ci-dessus est de degré 3, h est de degré 0.

Notations : On note X la fonction $X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$. Ainsi, plutôt que de noter $P : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 + 4x + 7 \end{array}$, on peut écrire $P = 3X^2 + 4X + 7$, ce qui est plus court. Mais attention à ne pas confondre x et X ! Lorsque l'on écrit $P(x) = 2x^2$, x désigne un élément de $\mathbb{R}$, alors que dans $P = 2X^2$, X désigne une fonction. On appelle cette fonction X l'*indéterminée* et on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. À n fixé, on note également $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont le degré est inférieur ou égal à n. Par exemple $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c,\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

On a défini les coefficients d'un polynôme et son degré, mais a priori, rien ne garantit qu'ils soient bien définis, c'est-à-dire qu'a priori un polynôme P pourrait très bien s'écrire de plusieurs manières sous la forme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Il n'en n'est rien grâce à la propriété suivante :

Proposition 1 : L'écriture d'un polynôme sous la forme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ (avec $n \in \mathbb{N}$) est unique. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

1.2 Opérations sur les polynômes

Proposition 2 : La somme de deux polynômes est encore un polynôme. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$. De plus, si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors cette inégalité est une égalité.

Exemple : si $P = 3X^2 + 5X - 2$ et $Q = X^3 - 4X^2 + X + 1$, alors $P + Q = X^3 - X^2 + 6X - 1$. Plus généralement, si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ (en posant éventuellement $a_i = 0$ si $i > \deg(P)$ et $b_i = 0$ si $i > \deg(Q)$), alors :

$$P + Q = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i$$

Proposition 3 : Le produit de deux polynômes est encore un polynôme. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ (avec la convention $-\infty + a = -\infty$).

Exemple : Reprenons les mêmes exemples. On a :

$$\begin{aligned} PQ &= (3X^2 + 5X - 2)(X^3 - 4X^2 + X + 1) \\ &= 3X^5 - 12X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 5X^4 - 20X^3 + 5X^2 + 5 - 2X^3 + 8X^2 - 2X - 2 \\ &= 3X^5 - 7X^4 - 19X^3 + 16X^2 + 3X - 2 \end{aligned}$$

On voit que le terme en X^3 provient du produit du terme en X^2 de P et du terme en X de Q, ainsi que du produit du terme en X du P et du terme en X^2 de Q, et du produit du terme constant de P et du terme en X^3 de Q. Plus généralement, si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{p} b_j X^j$, alors :

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{\substack{i \text{ et } j \text{ tels que} \\ i+j=k}} a_i b_j$$

Remarque :
- Cas particuliers : le coefficient dominant du produit est le produit des coefficients dominants. Idem pour les coefficients constants..
- On voit que l'on a les mêmes règles de calcul dans $\mathbb{R}[X]$ que dans $\mathbb{R}$, donc en particulier, toutes les propriétés calculatoires comme le binôme de Newton, ou la factorisation de $P^n - Q^n$ restent vraies dans $\mathbb{R}[X]$.

2 Division euclidienne

On a vu que l'on pouvait multiplier deux polynômes, mais a priori, on ne peut pas les diviser (comme on ne peut pas toujours diviser deux nombres entiers). Cependant, comme pour les nombres entiers, on peut faire une division avec reste, appelée *division euclidienne* :

Proposition 4 : Si A et B sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$. Si $R = 0$, c'est-à-dire que A est un multiple de B, on dit que A est divisible par B.

On ne va pas le démontrer dans le cas général, mais on va voir comment poser cette division sur un exemple : divisons $A = 6X^4 + 28X^3 + 47X^2 + 50X + 9$ par $B = 2X^2 + 6X + 1$.

Le terme dominant du quotient Q doit nécessairement être $3X^2$ pour que le terme en X^4 de BQ soit le même que celui de A. Ensuite $A - 3X^2B = 6X^4 + 28X^3 + 47X^2 + 50X + 9 - (6X^4 + 18X^3 + 3X^2) = 10X^3 + 44X^2 + 50X + 9$, ce que l'on peut écrire :

$$\begin{array}{ccccccccc|l} 6X^4 & + & 28X^3 & + & 47X^2 & + & 50X & + & 9 & 2X^2 + 6X + 1 \\ \cline{10-10} 6X^4 & + & 18X^3 & + & 3X^2 & & & & & 3X^2 \\ \cline{1-9} & & 10X^3 & + & 44X^2 & + & 50X & + & 9 & \end{array}$$

Et on continue la division avec $10X^3 + 44X^2 + 50X + 9$ au lieu de A. Le prochain terme du quotient sera $5X$ pour obtenir le $10X^3$ en multipliant par le terme dominant de B :

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
6X^4 & + & 28X^3 & + & 47X^2 & + & 50X & + & 9 & 2X^2+6X+1 \\ \cline{10-10}
6X^4 & + & 18X^3 & + & 3X^2 & & & & & 3X^2+5X \\ \cline{1-9}
 & & 10X^3 & + & 44X^2 & + & 50X & + & 9 & \\
 & & 10X^3 & + & 30X^2 & + & 5X & & & \\ \cline{3-9}
 & & & & 14X^2 & + & 45X & + & 9 &
\end{array}
$$

Et on recommence :

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
6X^4 & + & 28X^3 & + & 47X^2 & + & 50X & + & 9 & 2X^2+6X+1 \\ \cline{10-10}
6X^4 & + & 18X^3 & + & 3X^2 & & & & & 3X^2+5X+7 \\ \cline{1-9}
 & & 10X^3 & + & 44X^2 & + & 50X & + & 9 & \\
 & & 10X^3 & + & 30X^2 & + & 5X & & & \\ \cline{3-9}
 & & & & 14X^2 & + & 45X & + & 9 & \\
 & & & & 14X^2 & + & 42X & + & 7 & \\ \cline{5-9}
 & & & & & & 3X & + & 2 &
\end{array}
$$

Et on s'arrête là car $\deg(3X + 2) < \deg(2X^2 + 6X + 1)$. On en déduit donc que $A = (3X^2 + 5X + 7)B + (3X + 2)$. En particulier, A n'est pas divisible par B.

Cette méthode est particulièrement efficace pour factoriser un polynôme lorsque l'on connaît un des ses facteurs puisqu'on n'a qu'à poser la division euclidienne du polynôme par ce facteur. Par exemple, supposons que l'on sache que le polynôme $6X^3 + 13X^2 + 8X + 5$ est divisible par $3X + 5$. En posant la division euclidienne, on a alors :

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
6X^3 & + & 13X^2 & + & 8X & + & 5 & 3X+5 \\ \cline{8-8}
6X^3 & + & 10X^2 & & & & & 2X^2+X+1 \\ \cline{1-7}
 & & 3X^2 & + & 8X & + & 5 & \\
 & & 3X^2 & + & 5X & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & 3X & + & 5 & \\
 & & & & 3X & + & 5 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Donc $6X^3 + 13X^2 + 8X + 5 = (3X + 5)(2X^2 + X + 1)$.

3 Racines et factorisations

3.1 Racines d'un polynôme

Définition 3 : Un élément $a \in \mathbb{R}$ est une racine (ou zéro) d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ si $P(a) = 0$, c'est-à-dire si a est solution de l'équation $P(x) = 0$.

Exemple : Si $P(X) = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 3$, alors 1 et -3 sont des racines de P, car $P(1) = 0$ et $P(-3) = 0$, mais 0 n'en est pas une car $P(0) = -3 \neq 0$.

Proposition 5 : Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Démonstration : à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

L'existence (ou la connaissance) de racines d'un polynôme permet de le factoriser :

Proposition 6 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Un élément $a \in \mathbb{R}$ est racine de P si et seulement si $X - a$ divise P, i.e il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$.

Démonstration : (limite du programme) Commençons par l'implication droite-gauche : si on a $P(X) = (X - a)Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$, donc a est racine de P.

Réciproquement, supposons que $P(a) = 0$ (avec $P \neq 0$ sinon, il n'y a rien à faire).
On fait la division euclidienne de P par $X-a$. On obtient deux polynômes Q et R tels que $P = (X-a)Q+R$. De plus, $\deg(R) < \deg(X - a)$, c'est-à-dire que R est un polynôme constant. Et en évaluant en a : $P(a) = (a - a)Q(a) + R(a)$, soit $R(a) = 0$ (car $P(a) = 0$). On en déduit que $R = 0$ (puisqu'il est constant) et donc que $P(X) = (X - a)Q(X)$

Méthode 1 : importante
En pratique, on a deux méthodes pour factoriser un polynôme : On peut chercher les coefficients de Q :

1. en effectuant la division euclidienne de P par $X - a$
2. en développant $(X-a)Q$ et en identifiant avec les coefficients de P, ce qui revient à résoudre un système d'équations.

Proposition 7 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des racines distinctes de P, alors P est divisible par $(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$.

Proposition 8 : Un polynôme non nul de degré $n \geqslant 0$ ne peut pas avoir strictement plus de n racines distinctes. Autrement dit, un polynôme de degré inférieur à n qui a au moins $n + 1$ racines est nécessairement nul. En particulier, un polynôme qui a une infinité de racines est nul.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde. Supposons que P soit un polynôme non nul de degré $n \geqslant 0$ et admette un nombre $k > n$ de racines distinctes $x_1, \dots, x_k$. Alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_k)Q$. En regardant les degrés, on a donc $\deg(P) = k + \deg(Q)$. Si P est non nul, alors Q est non nul aussi et $\deg(P) \geqslant k > n$ (puisque $\deg(Q) \geqslant 0$). absurde donc P ne peut pas admettre plus que n racines disctinctes.

Exemples :
— La fonction sin n'est pas un polynôme car elle s'annule en une infinité de réels mais n'est pas nulle.
— Soient P et Q deux polynômes du second degré tels que $P(1) = Q(1)$, $P(2) = Q(2)$ et $P(3) = Q(3)$. Alors 1, 2 et 3 sont racines de $P - Q$, qui est de degré inférieur à 2. On en déduit que $P - Q = 0$, soit $P = Q$.

3.2 Multiplicité des racines

Définition 4 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a une racine de P. La multiplicité de a est le plus grand entier naturel m pour lequel P est divisible par $(X - a)^m$. Une racine de multiplicité 1 est dite simple, une racine de multiplicité 2 est dite double, etc.

Exemple : $Q = (X - 1)^2(X - 3)$ 1 est racine de P de multiplicité 2. Le polynôme $(X - 6)^3(X + 2)$ a une racine simple qui est -2 et une racine triple qui est 6.

Remarque : De même que dans la partie précédente, si P admet une racine x_1 de multiplicité m_1, une racine x_2 de multiplicité m_2, ... , une racine x_k de multiplicité m_k, alors P est divisible par $(X-x_1)^{m_1}\cdots(X-x_k)^{m_k}$. Et, de même, en regardant les degrés, on en déduit que le nombre de racines de P *comptées avec leurs multiplicités* ne peut pas être strictement plus grand que le degré de P.

Pour déterminer la multiplicité m d'une racine a d'un polynôme P, on peut factoriser par $X-a$, puis vérifier si le quotient est factorisable par $X-a$, etc. jusqu'à ce que l'on ne puisse plus. On aura alors bien factorisé par $(X-a)^m$, où m est le plus grand possible. Mais il y a un critère plus direct pour déterminer la multiplicité d'une racine et pouvoir directement factoriser par la bonne puissance de $X-a$:

Proposition 9 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors a est une racine de P de multiplicité m si et seulement si $P(a) = 0, P'(a) = 0, \dots, P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Exemple : Soit $P = X^3+3X^2-9X+5$. Alors $P(1) = 0$, $P' = 3X^2+6X-9$, donc $P'(1) = 0$, $P'' = 6X+6$, donc $P''(1) = 12 \neq 0$. On en déduit que 1 est une racine double de P. On peut donc factoriser P par $(X-1)^2$.

Proposition 10 : Si a est une racine de f de multiplicité $k \geq 2$ alors c'est une racine de f' de multiplicité $k-1$.

Proposition 11 : Un polynôme change de signe en une racine si et seulement si sa multiplicité est impaire.

Démonstration : P a x_0 pour racine de multiplicité paire $\Longleftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{N}$, et $g \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) = (x-x_0)^{2k}g(x)$ avec $g(x)$ de signe constant au voisinage de x_0 $\Longleftrightarrow$ P ne change pas de signe en x_0

3.3 Factorisations sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

Proposition 12 : Soit P un polyôme de degré 2 $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Les racines x_0 et x_1 (éventuellement complexes) de P vérifient $x_0x_1 = \dfrac{a_0}{a_2}$ et $x_0 + x_1 = -\dfrac{a_1}{a_2}$

Définition 5 : Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est dit scindé lorsqu'il peut s'écrire sous la forme $\alpha(X-x_1)^{m_1}\cdots(X-x_k)^{m_k}$ où $\alpha, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ et $m_1, \cdots, m_k \in \mathbb{N}$.

Exemple : Le polynôme $2X^3-2X^2-2X+2 = 2(X-1)^2(X+1)$ est scindé. Le polynôme X^2+1 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (il ne peut pas se factoriser, car il n'a pas de racine réelle), mais il est scindé sur $\mathbb{C}$: $X^2+1 = (X-i)(X+i)$.

Remarque : En quelque sorte, un polynôme est scindé si on peut « totalement » le factoriser, c'est-à-dire si son degré est égal au nombre de ses racines (comptées avec leurs multiplicités).

Tous les polynômes réels ne sont pas forcément scindés (X^2+1 n'a pas de racine réelle). Par contre, sur $\mathbb{C}$, tout se passe bien, puisque l'on a le théorème suivant :

Théorème (d'Alembert-Gauss) : *Tout polynôme de* $\mathbb{R}[X]$ *est scindé sur* $\mathbb{C}$.

Démonstration : Admis. □

En ce qui concerne la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, la situation est moins agréable, cependant, on va voir que le théroème de d'Alembert-Gauss permet d'obtenir quand même des informations sur la factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$. Mais pour cela, on a besoin de la propriété suivante :

Proposition 13 : Soit P un polynôme à coefficients réels . Si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $\bar{a}$ est racine de P.

Remarque :
— Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. Pourtant, on peut quand même le factoriser dans $\mathbb{R}$: $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$. C'est juste qu'on ne peut pas le factoriser par un polynôme de la forme $X - a$, avec $a \in \mathbb{R}$.
— En regardant le degré, on voit que si $\deg(P)$ est impair, il y a nécessairement un facteur de la forme $(X - a)^m$. Donc P a forcément une racine réelle (ce qu'on a déjà démontré à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires).

Remarque : Si on sait factoriser un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}$, alors on sait le factoriser sur $\mathbb{C}$: il suffit de chercher les racines (complexes) des trinômes du second degré qui apparaissent dans la décomposition de P. Réciproquement, si on sait le factoriser sur $\mathbb{C}$, alors on peut le factoriser sur $\mathbb{R}$: il suffit de regrouper ensemble les racines qui sont complexes conjuguées .

4 Fonctions polynomiales et extrema locaux

Proposition 14 : Si P a extremum en a alors $P'(a) = 0$ (a est une racine de P').

Remarque : La réciproque est fausse (fonction $x \to x^3$) mais on a les résultats suivants.

Proposition 15 : Soit P un polynôme et a une racine de P' telle que $P''(a) \neq 0$ alors P a un extremum local en a. Si $P''(a) > 0$, on a un minimum local et si $P''(a) < 0$, on a un maximum local.

Proposition 16 : Un polynôme P admet un extremum local en a si et seulement si a est une racine de P' de multiplicité impaire.