Exercice 1

1. Rappeler les formules de toutes les lois de probabilités vues cette année ainsi que leurs espérances et leurs variances
2. Rappeler la formule du triangle de Pascal
3. Soit $z = 1 + i$. Donner $\bar{z}$. Donner le module et un argument de z
4. Soit la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = u_1 = 1$. Donner le terme général de la suite u.
5. $\sum \frac{1}{n!}$ converge -t-elle ? $\sum \frac{n}{2^n}$ converge-t-elle ? Si oui, calculer leur somme.

Exercice 2
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que la matrice P est inversible
   (b) Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.
   (c) Déterminer la matrice D vérifiant $A = PDP^{-1}$.
2. (a) La matrice D est-elle inversible ?
   (b) La matrice A est-elle inversible ?
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer D^n.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer A^n en fonction des matrices, P, P^{-1} et D^n.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire les neuf coefficients de la matrice A^n.
4. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies par :$a_1 = 1$, $b_1 = 2$ et $c_1 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} a_{n+1} = & 3a_n + 2b_n - 2c_n \\ b_{n+1} = & -a_n + c_n \\ c_{n+1} = & a_n - b_n + 6c_n \end{cases}$$

   Calculer les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 3
Rappeler la définition du rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un système linéaire.
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Que vaut $rg(M)$? M est-elle inversible ? Si oui, que vaut son inverse ?

Exercice 4
On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir pile vaut $p \in]0;1[$. On note $q = 1 - p$.
On fait un succession illimitée de lancers avec cette pièce.
Soit k un entier naturel non nul. On note B_k l'événement " On obtient PILE pour la première fois lors du lancer numéro k. " On note A l'événement « on n'obtient que FACE lors de cette série infinie de lancers ».

1. Justifier que l'événement A est quasi-impossible.
2. Soit k un entier naturel non nul. Déterminer la probabilité de B_k pour tout entier naturel k non nul.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir PILE pour la deuxième fois.
   (a) Déterminer $X(\Omega)$.
   (b) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
   (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 3.
   (d) Justifier que $P(X = k) = \sum_{j=1}^{k-1} P(B_j \cap (X = k))$.
   (e) En déduire que $P(X = k) = (k - 1)q^{k-2}p^2$.
   (f) Calculer $\sum_{k\in X(\Omega)} P(X = k)$. Est ce cohérent ?
4. Justifier que la variable X admet une espérance et calculer son espérance en fonction de p.

Exercice 5
Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'application linéaire qui à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur $u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique
2. Déterminer une base (a, b) de $ker(u - Id)$
3. Donner un vecteur c tel que $ker(u) = vect(c)$
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'
6. Montrer que $Im(u) = ker(u - Id)$
7. u est-elle un endomorphisme ? un isomorphisme ?
8. Vérifier le théorème du rang pour u

Exercice 6
Soit $A = \{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que A est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Quelle est la dimension de $M_3(\mathbb{R})$?
3. Donner une base de A. En déduire la dimension de A

Exercice 7
Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé pour toute la suite de l'exercice.

Un péage autoroutier est composé de N couloirs numérotés de 1 à N.

On fait les hypothèses suivantes:

- Chaque automobiliste qui se présente à ce péage, emprunte l'un de ces couloirs choisi de manière aléatoire et indépendamment des choix des autres automobilistes.
- Pour chaque automobiliste, les couloirs ont tous la même chance d'être choisis.

Partie I

soit r un entier naturel non nul fixé.

On suppose dans cette partie I seulement, que r voitures exactement se présentent à ce péage en une heure.

Pour tout $i \in [\![1N]\!]$, on note :

- X_i le nombre d'automobilistes qui choisissent le couloir numéro i durant une heure.
- Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le couloir numéro i est choisi au moins une fois durant une heure et 0 sinon.

On note T le nombre de couloirs choisis au moins une fois durant une heure.

1. Soit $i \in [\![1N]\!]$. Déterminer la loi de X_i, puis préciser son espérance et sa variance.
2. Soit $(i, j) \in [\![1N]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Est-ce que les variables X_i et X_j sont indépendantes ?
3. Préciser la valeur de $X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, puis en déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{N} X_k$.
4. Soit $(i, j) \in [\![1N]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi de $X_i + X_j$. Préciser la variance de $X_i + X_j$.
   (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j) puis le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_i, X_j).
5. (a) Soit $i \in [\![1N]\!]$. Déterminer la loi de Y_i.
   (b) Exprimer la variable aléatoire T en fonction des variables aléatoires $(Y_i)_{i\in[\![1N]\!]}$.
   (c) En déduire que $E(T) = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^r\right)$.

Partie II

Soit λ un réel strictement positif fixé. Dans toute cette partie, on suppose que le nombre de voitures qui passent à ce péage autoroutier durant une heure est une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'automobilistes qui empruntent le couloir numéro 1 durant une heure.On note $Y = Z - X$.

1. (a) Soit n un entier naturel fixé. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire X sachant que l'événement $[Z = n]$ est réalisé.
   (b) En déduire que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
2. (a) Montrer que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{i+j}\,(N-1)^j}{i!\,j!\,N^{i+j}}$
   (b) En déduire la loi de Y, son espérance et sa variance.
   (c) Les variables X et Y sont elles indépendantes?
   (d) En déduire la covariance du couple (X, Z).