On note E un espace vectoriel de dimension finie.

1 Somme de sous-espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition 1 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors $F + G = \{x + y | x \in F, y \in G\}$

Proposition 1 : Formule de Grassman Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

Démonstration : On constate l'analogie avec la formule valable pour A et B deux ensembles finis : $card(A \cup B) + car(A \cap B) = card(A) + card(B)$.

La dimension d'un espace vectoriel est le cardinal d'une base de cet espace.

Choisissons C une base de $F \cap G$. On peut la compléter en une base A de F et une base B de G. On obtient alors

$card(C) = card(A \cap B) = dim(F \cap G)$ et la formule $card(A) + card(B) = card(A \cup B) + car(A \cap B)$ s'écrit exactement

$dim(F) + dim(G) = dim(F + G) + dim(F \cap G)$

Définition 2 : Soient $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ n sous-espaces vectoriels de E alors $\sum_{i \in [\![1;n]\!]} F_i = \{\sum_{i=1}^{n} x_i | x_i \in F_i, \forall i \in [\![1; n]\!]\}$

1.2 Somme directe, sous-espaces supplémentaires

1.3 Définition et propriétés

Définition 3 : Soit F, G deux s.e.v. de E.

1. On dit que F et G sont en somme directe ssi :

$$\forall x \in F + G, \exists!(u, v) \in F \times G, x = u + v$$

et on note $F + G = F \oplus G$

2. On dit que F et G sont supplémentaires ssi :

$$\forall x \in E, \exists!(u, v) \in F \times G, x = u + v$$

autrement dit ssi

$$E = F \oplus G$$

Proposition 2 : Si F et G sont en somme directe, n'importe quelles bases de F et de G misent bout à bout forment une base de $F + G$. Réciproquement, s'il existe une base F et une base de G qui misent bout à bout forment une base de $F + G$, alors F et G sont en somme directe.

Proposition 3 : Caractérisation des espaces en somme directe

$$F + G = F \oplus G \iff dim(F) + dim(G) = dim(F + G) \iff F \cap G = \{0_E\}$$

Proposition 4 : F, G supplémentaires ssi

1. $F + G = E$ et $dim(F) + dim(G) = dim(E)$
2. $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$
3. $dim(F) + dim(G) = dim(E)$ et $F \cap G = \{0_E\}$

1.4 Généralisation

Définition 4 : La famille $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ est en somme directe ssi

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{n} F_i, \forall i \in [\![1;n]\!] \exists! u_i \in F_i, x = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

c'est à dire que pour tous vecteurs de la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$, la décomposition de x en somme d'élements des F_i est unique.

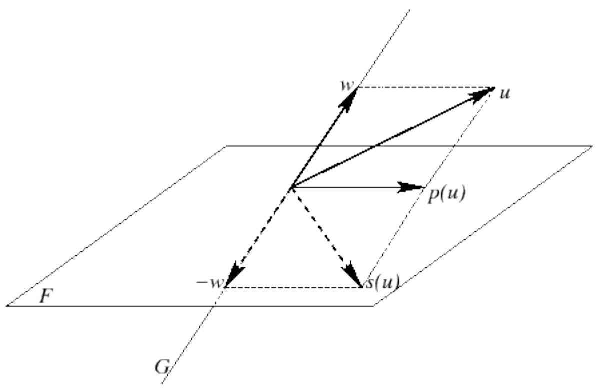
Proposition 5 : Si la famille $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ est en somme directe, n'importe quelles bases des F_i misent bout à bout forment une base de $\sum\limits_{i\in[\![1;n]\!]} F_i$. Réciproquement, s'il existe des bases des F_i qui misent bout à bout forment une base de $\sum\limits_{i\in[\![1;n]\!]} F_i$ alors la famille $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ est en somme directe

Proposition 6 : $E = \oplus_{i=1}^{n} E_i$ équivaut à $E = \sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ et $dim(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} dim(E_i)$

2 Projections, symétries

Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Alors tout vecteur u de E se décompose de manière unique sous la forme $u = v + w$ où $v \in F$ et $w \in G$

Définition 5 :
1. On appelle projection sur F parallèlement à G, l'application qui à $u \in E$ associe l'unique élément v de F tel que $u - v \in G$
2. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application qui à $u \in E$ associe $v - w$ où (v,w) est l'unique couple de vecteurs tel que $v \in F$, $w \in G$ et $u = v + w$.



Proposition 7 : La projection sur F parallèlement à G et la symétrie par rapport à F parallèlement à G sont des applications linéaires.

Proposition 8 : Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection ssi $p \circ p = p$.

Démonstration : Si p est la projection sur F parallèlement à G alors $\forall v \in F, p(v) = v$ donc $p \circ p = p$.

Réciproquement, si $p \circ p = p$, nous allons montrer que p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.

Montrons que $Im(p)$ et $\ker(p)$ sont supplémentaires dans E.

$\forall u \in E$, on peut écrire $u = p(u) + u - p(u)$. On a alors $p(u) \in Im(p)$ et $u - p(u) \in \ker(u)$ car $p(u - p(u)) = p(u) - p^2(u) = p(u) - p(u) = 0$.

donc $E = Ker(p) + Im(p)$

Montrons que $Ker(p) \cap Im(p) = \{0_E\}$ Soit $x \in Ker(p) \cap Im(p)$ alors $p(x) = 0$ or $x \in Im(p)$ donc il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ donc $p(x) = p^2(y) = p(y) = x = 0$

donc $E = Ker(p) \oplus Im(p)$

donc p est bien la projection sur $Im(p)$ parallèlement à Ker(p)

Proposition 9 : Un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une projection ssi $s \circ s = I_E$ où I_E désigne l'identité de E.

3 Valeurs propres, diagonalisation

3.1 Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres

3.1.1 Définition

Définition 6 : S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $x \neq 0 \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$ alors λ est une valeur propre de u. x est alors un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Proposition 10 : Soit λ une valeur propre de u. Le sous-ensemble des vecteurs propres de u associé à λ est un sous-espace vectoriel appelé sous-espace propre de u associé à λ et est (souvent) noté E_λ.

$$E_\lambda = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$$
$$E_\lambda = \{x \in E | u(x) - \lambda x = 0\}$$
$$E_\lambda = Ker(u - \lambda Id_E)$$

Définition 7 : Le spectre de u est l'ensemble des valeurs propres de u. On le note $Sp(u)$.

Remarque : On définit de la même façon valeurs propres, vecteurs propres, espace propre et spectre d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$: S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $X \neq 0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = \lambda X$ alors λ est une valeur propre de M. X est alors un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ. $E_\lambda = Ker(M - \lambda Id_n)$ est l'espace propre de M associé à la valeur propre λ.

Exemples : — Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(x, y, z) = (2x - 2y + 2z,\ 2x - 3y + 4z,\ x - 2y + 3z)$$

Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

On cherche les valeurs propres de u. Cela revient à chercher les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $u - \lambda Id$ ne soit pas bijectif, ou, ce qui revient au même, les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M - \lambda I$ ne soit pas inversible. On fait donc un pivot de Gauss sur la matrice $M - \lambda I$:

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -3-\lambda & 4 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3-\lambda \\ 2 & -3-\lambda & 4 \\ 2-\lambda & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L3 \leftarrow L_3 + (\lambda-2)L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda - 2 \\ 0 & 2-2\lambda & -\lambda^2 + 5\lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda - 2 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

Or, une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Donc la matrice ci-dessus est inversible si et seulement si $1-\lambda \neq 0$ et $\lambda(1-\lambda) \neq 0$, i.e $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 0$.
On en déduit que M, et donc u, admet 2 valeurs propres qui sont 0 et 1 : $Sp(M) = Sp(u) = \{0;1\}$.

On cherche les espaces propres correspondants :
L'espace propre associé à la valeur propre 0 et $Ker(u - 0Id)$, i.e $Ker(u)$. On résout donc $u(x,y,z) = (0,0,0)$:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) = (0,0,0) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 & \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 0 & \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 0 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 & \\ & - & y & + & 2z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & - & 2y & + & 4z & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 & \\ & - & y & + & 2z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 2z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'espace propre associé à la valeur propre 0 est donc :

$$Ker(u) = \{(z,2z,z), z \in \mathbb{R}\} = Vect(e_1) \quad \text{avec } e_1 = (1,2,1)$$

Les vecteurs propres de u associés à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls de la forme $(z,2z,z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.
Cherchons l'espace propre associé à la valeur propre 1. Il s'agit de l'espace $Ker(u - 1Id)$, i.e $Ker(u - Id)$. On résout donc $u(x,y,z) - (x,y,z) = (0,0,0)$:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) - (x,y,z) = (0,0,0) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & + & 4z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} x - 2y + 2z & = & 0 & \\ 0 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \\
&\iff x = 2y - 2z
\end{aligned}$$

L'espace propre associé à la valeur propre 1 est donc :

$$\begin{aligned}
Ker(u - Id) &= \left\{(2y-2z,\ y,\ z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{y(2,1,0) + z(-2,0,1),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= Vect(e_2, e_3) \quad \text{avec } e_2 = (2,1,0) \text{ et } e_3 = (-2,0,1)
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls de la forme $(2y - 2z,\ y,\ z)$ avec $(y,z) \in \mathbb{R}^2$.

— Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. De même, on fait un pivot de Gauss sur la matrice $M - \lambda I$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Or, $-1 - \lambda^2 \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que $M - \lambda I$ est toujours inversible. Par conséquent, la matrice M n'admet aucune valeur propre réelle : $Sp(M) = \emptyset$.

Méthode 1 : Pour trouver les valeurs propres d'une matrice 2×2, plutôt que faire un pivot de Gauss, on peut aussi utiliser le critère (vu dans le chapitre sur les matrices) : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exemple : Soit $M = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } M &\iff M - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} -10-\lambda & 18 \\ -6 & 11-\lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff (-10-\lambda)(11-\lambda) - (-6)18 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 2 \end{aligned}$$

Donc $Sp(M) = \{-1; 2\}$.

Proposition 11 : Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

Démonstration : Considérons une matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors $T - \lambda I = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_n - \lambda \end{pmatrix}$. Or, une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. On en déduit que $T - \lambda I$ est inversible si et seulement si $a_i - \lambda \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ou encore, par contraposée : $T - \lambda I$ est non inversible si et seulement si $a_1 - \lambda = 0$ ou ... ou $a_n - \lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = a_1$ ou ... ou $\lambda = a_n$.
Et de même pour une matrice triangulaire inférieure.

Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ a 3 valeurs propres, qui sont -1, 2 et -7.

Proposition 12 : Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres (mais pas les mêmes vecteurs propres par contre).

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit M et M' deux matrices semblables : $M = PM'P^{-1}$ avec P inversible. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } M &\iff M - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff PM'P^{-1} - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff P(M' - \lambda I)P^{-1} \text{ n'est pas inversible} \\ &\qquad (\text{car } P(M' - \lambda I)P^{-1} = PM'P^{-1} - \lambda I) \\ &\iff M' - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \lambda \text{ est valeur propre de } M' \end{aligned}$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -46 & 60 \\ -36 & 47 \end{pmatrix}$. Alors $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$). On en déduit que $Sp(A) = Sp(D) = \{-1; 2\}$.

3.1.2 Quelques propriétés

Proposition 13 : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des valeurs propres de u distinctes deux à deux, et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs propres associés. Alors la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre.

Remarques : On l'a énoncé pour un endomorphisme u, mais c'est bien entendu vrai pour une matrice M : si $X_1, \ldots, X_n$ sont des vecteurs propres de M associés respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille libre d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple : Si on reprend l'exemple de l'endomorphisme dont on a cherché les valeurs propres à la partie précédente, alors $v_1 = (1, 2, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0 et $v_2 = (2, 1, 0)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Donc (v_1, v_2) est une famille libre.

Démonstration : On le fait par récurrence.

Pour $n = 1$, si v_1 est un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ_1, alors $v_1 \neq 0$ par définition, donc la famille (v_1) est libre (si α est un réel tel que $\alpha v_1 = 0$, alors forcément $\alpha = 0$).

Supposons la propriété vraie pour n vecteurs avec $n \geqslant 1$ quelconque fixé. Montrons que la propriété est alors vraie pour $n + 1$ vecteurs :

Soit $v_1, \ldots, v_{n+1}$ vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$. Montrons que la famille $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ est libre.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0 \tag{1}$$

On applique u de chaque côté :

$$u(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1}) = u(0)$$

Ce qui donne, par linéarité de u :

$$\alpha_1 u(v_1) + \ldots + \alpha_n u(v_n) + \alpha_{n+1} u(v_{n+1}) = 0$$

Et donc, comme $v_1, \ldots, v_{n+1}$ sont des vecteurs propres de u :

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n v_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0 \tag{2}$$

En faisant $(2) - \lambda_{n+1}(1)$, on obtient alors :

$$\alpha_1(\lambda_{n+1} - \lambda_1)v_1 + \ldots + \alpha_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n)v_n = 0$$

Or, par hypothèse de récurrence, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre, donc :

$$\alpha_1(\lambda_{n+1} - \lambda_1) = 0 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \alpha_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$$

De plus, $\lambda_{n+1} - \lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (car les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Par conséquent, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

En reportant cela dans l'équation (1), il reste $\alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$, et donc $\alpha_{n+1} = 0$ (car $v_{n+1} \neq 0$ par définition d'un vecteur propre).

Ainsi, on a bien montré que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 0$, ce qui prouve que la famille $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ est libre, et ce qui termine la récurrence. □

Proposition 14 : Un endomorphisme d'un espace de dimension n (ou une matrice d'ordre n) admet au plus n valeurs propres distinctes.

3.1.3 Valeurs propres et polynômes annulateurs

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I = 0$. On dit que le polynôme P défini par $P(X) = X^2 - 3X + 2 = 0$ est un polynôme annulateur de A.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, montrer que λ est une racine de P.
   Corrigé : Soit X un vecteur propre, associé à la valeur propre λ alors $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$. Ainsi, on a : $(A^2 - 3A + 2I)X = A^2X - 3AX + 2X = \lambda^2 X - 3\lambda X + 2X = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)X$. Mais comme $A^2 - 3A + 2I = 0$, on en déduit que $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)X = 0$ et donc $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ car $X \neq 0$. Par conséquent, $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

3. Quelles sont les valeurs propres de A ?

On a le résultat suivant (hors programme) qui ne peut pas être utilisé sans être redémontré :

Proposition 15 : Si A est une matrice admettant un un polynôme annulateur P (i.e un polynôme tel que $P(A) = 0$), et si λ est une valeur propre de A, alors λ est une racine de P.

Remarques :
— La réciproque est fausse : toutes les racines de P ne sont pas forcément des valeurs propres. Par exemple, dans l'exercice ci-dessus rien ne garantit que 1 et 2 soient effectivement des valeurs propres de A. Tout ce qu'on sait est qu'il ne peut pas en avoir d'autres. Mais a priori, 1 pourrait ne pas être valeur propre, et 2 aussi. Pour le savoir, il faudrait chercher les espaces propres associés à 1 et à 2 et voir s'ils contiennent d'autres vecteurs que 0.
— La propriété fonctionne aussi avec des endomorphismes : si u est un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur P, alors toute valeur propre de u est racine de P.

3.2 Diagonalisation

3.2.1 Définition

Définition 8 : Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est semblable à N s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PNP^{-1}$. On dit qu'une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire si elle est de la forme PDP^{-1} avec P inversible et D diagonale.

Remarques :
— Si M est semblable à N avec $M = PNP^{-1}$, alors N est semblable à M, car $N = QMQ^{-1}$ avec $Q = P^{-1}$.
— D'après le paragraphe précédent, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent la même application linéaire, mais dans deux bases différentes.
— Si M et N sont semblables, alors la matrice P n'est pas forcément unique : il peut exister plusieurs matrices inversibles telles que $M = PNP^{-1}$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -46 & 60 \\ -36 & 47 \end{pmatrix}$. Alors $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$). Les matrices A et D sont semblables : la matrice A est donc diagonalisable.

Lorsque des matrices sont semblables, les calculs sur l'une des matrices peuvent se ramener à des calculs sur l'autre :

Propriété : *Si $M = PNP^{-1}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PN^nP^{-1}$. De plus, M est inversible si et seulement si N l'est et, le cas échéant : $M^{-1} = PN^{-1}P^{-1}$.*

La plus souvent, on l'utilise pour les matrices diagonalisables car les calculs sont faciles à faire pour les matrices diagonales.

Exemple : On reprend l'exemple précédent. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \times (-1)^n - 15 \times 2^n & -20 \times (-1)^n + 20 \times 2^n \\ 12 \times (-1)^n - 12 \times 2^n & -15 \times (-1)^n + 16 \times 2^n \end{pmatrix}$$

De plus, la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible (diagonale avec uniquement des coefficients non nuls sur la diagonale), donc A aussi et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47/2 & 30 \\ -18 & 23 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Pour les puissances, on le fait par récurrence.

Pour $n = 0$, on a $M^0 = I$, et $PN^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Supposons maintenant que $M^n = PN^nP^{-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé et montrons que l'on a alors $M^{n+1} = PN^{n+1}P^{-1}$:

$$M^{n+1} = MM^n = PNP^{-1}PN^nP^{-1} = PNN^nP^{-1} = PN^{n+1}P^{-1}$$

La récurrence est établie, on a donc $M^n = PN^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Regardons l'inversibilité. Supposons N inversible. On a alors $M(PN^{-1}P^{-1}) = PNP^{-1}PN^{-1}P^{-1} = PNN^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = I$. Donc M est inversible et $M^{-1} = PN^{-1}P^{-1}$. Réciproquement, si M est inversible, alors, de même, $N(P^{-1}M^{-1}P) = I$. Ce qui prouve que N est inversible (d'inverse $P^{-1}M^{-1}P$). □

Remarque : La plupart du temps, en concours, il est demandé de redémontrer cette propriété. La démonstration est donc à connaître.

Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables, mais pour les matrices symétriques, c'est toujours le cas :

Propriété : *Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.*

Démonstration : Admis □

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Remarque : Cette propriété ne fournit ni la matrice diagonale, ni la matrice de passage qui permet de s'y ramener. Elle ne fait qu'affirmer leur existence.

Définition 9 : On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Remarque : Soit u un endomorphisme, et M sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ quelconque. On a alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} &\iff \text{Il existe une base } \mathcal{B}' \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ est diagonale} \\ &\iff \text{Il existe une matrice inversible } P \text{ telle que } P^{-1}MP \text{ soit diagonale} \end{aligned}$$

Autrement dit, u est diagonalisable (en tant qu'endomorphisme) si et seulement si M est diagonalisable (en tant que matrice).

Proposition 16 : Un endomorphisme d'un espace de dimension n (ou une matrice d'ordre n) qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Démonstration : Dans un espace vectoriel E de dimension n, u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs propres associés. D'après la première propriété, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre à n éléments, dans E qui est dimension n. C'est donc une base de E.

Cherchons la matrice de u dans cette base :

$$\begin{aligned} u(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n \\ u(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + 0v_n \\ &\vdots \\ u(v_n) &= \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda v_n \end{aligned}$$

Donc la matrice de u dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, qui est diagonale. Autrement dit, on a montré la propriété suivante :

De plus, on a un moyen pratique de diagonaliser : pour obtenir une base permettant de diagonaliser, il suffit de prendre des vecteurs propres associés respectivement à chacune des valeurs propres. En termes de matrices, pour diagonaliser une matrice d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes, il suffit de considérer la matrice P dont les n colonnes sont n vecteurs propres associés respectivement à chacune des valeurs propres. La matrice P est alors inversible et $P^{-1}MP$ est diagonale (les coefficients sur la diagonale étant les valeurs propres).

En dimension n, si un endomorphisme admet n valeurs propres distinctes, alors la dimension de chaque espace propre est nécessairement 1 (puisque la somme des dimensions des espaces propres doit être égale à n).

Proposition 17 : Les sous espaces propres d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ sont en somme directe.

Proposition 18 : Un endormorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ E est somme directe des sous-espaces propres de u $\Leftrightarrow$ il existe une base de E formée de vecteurs propres de u $\Leftrightarrow$ la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à $dim(E)$.

Méthode 2 : À l'aide de cela on en déduit la méthode pour diagonaliser un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension n (ou une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) :

1. On cherche toutes les valeurs propres (par pivot de Gauss, ou à l'aide d'un polynôme annulateur).
2. Pour chacune, on cherche une base de l'espace propre.
3. D'après ce qui précède, en regroupant toutes ces bases, on obtient une famille libre.
   (a) Si son nombre d'éléments est égal à n, i.e si la somme des dimensions des espaces propres est égale à la dimension de E, c'est alors une base de E. Dans cette base, la matrice de u sera alors diagonale.
   (b) Si son nombre d'éléments est strictement plus petit que n, i.e si la somme des dimensions des espaces propres n'est pas égale à la dimension de E, alors on ne peut pas diagonaliser u : u n'est pas diagonalisable.

Exemples : 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. En faisant un pivot de Gauss sur la matrice $M - \lambda I$, on peut voir que M admet 3 valeurs propres qui sont -2, 0 et 1. Donc M est diagonalisable.

De plus, on peut voir que $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres -2, 0 et 1. En définissant $P = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\-1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, la matrice P est alors inversible et $P^{-1}MP = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix}-4 & -6 & 6\\0 & 2 & 0\\-3 & -3 & 5\end{pmatrix}$. On peut voir que M admet 2 valeurs propres, qui sont -1 et 2 (soit par pivot de Gauss, soit en remarquant que $M^2 - M - 2I = 0$). De plus, en résolvant $(M + I)X = 0$ et $(M - 2I)X = 0$, on peut voir que l'espace propre associé à la valeur propre -1 est $E_{-1} = Vect\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et que l'espace propre associé à la valeur propre 2 est $E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre, donc forme une base de E_2. Ainsi, $\dim(E_{-1}) + \dim(E_2) = 1 + 2 = 3$. On en déduit que M est diagonalisable : on a $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (les colonnes de P sont les vecteurs des bases de E_{-1} et E_2) et $D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ (les éléments diagonaux sont les valeurs propres correspondantes aux colonnes de P).

3. Soit $A = \begin{pmatrix}14 & -9 & 21\\4 & -3 & 6\\-8 & 5 & -12\end{pmatrix}$. Alors on peut voir (après calculs) que A admet 2 valeurs propres qui sont 0 et -1. Or, $E_0 = Vect\left(\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1} = Vect\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$. On voit que $\dim(E_0) + \dim(E_{-1}) = 1 + 1 < 3$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(x, y, z) = (2x - 2y + 2z,\ 2x - 3y + 4z,\ x - 2y + 3z)$$

On avait trouvé que u admettait 2 valeurs propres : 0 et 1. De plus, l'espace propre associé à la valeur propre 0 est $E_0 = Ker(u) = Vect(e_1)$ avec $e_1 = (1, 2, 1)$, et l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $E_1 = Ker(u - Id) = Vect(e_2, e_3)$ avec $e_2 = (2, 1, 0)$ et $e_3 = (-2, 0, 1)$.
La famille (e_1) est une base de E_0 et la famille (e_2, e_3) est une base de E_1. Donc (e_1, e_2, e_3) est une famille libre. Comme elle a 3 éléments et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc u est diagonalisable : dans la base (e_1, e_2, e_3), la matrice de u est $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ défini par :

$$u(aX + b) = (-5a - 8b)X + (4a + 7b)$$

On peut voir que u admet deux valeurs propres distinctes qui sont -1 et 3. Comme $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$, on en déduit que u est diagonalisable.
De plus, on peut voir que $P_1(X) = 2X - 1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1, et $P_2(X) = X - 1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3. La famille (P_1, P_2) est donc une base de $\mathbb{R}_1[X]$, et, dans cette base la matrice de u est $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$.