Exercice 1

1. Voir cours
2. Voir cours
3. Soit $z = 1 + i$. Donner $\bar{z}$. Donner le module et un argument de z On a $|z| = \sqrt{2}$ $\bar{z} = 1 - i$ et $arg(z) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
4. Soit la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = u_1 = 1$. L'équation caractéristique de la suite u est $r^2 - r - 1 = 0$ qui a pour racine $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = ar_1^n + br_2^n$. On a $u_0 = a + b = 1$ et $u_1 = \dfrac{a+b}{2} + (b-a)\dfrac{\sqrt{5}}{2} = 1$ Donc (a, b) est solution du système
$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ \dfrac{a+b}{2} + (b-a)\dfrac{\sqrt{5}}{2} & = & 1 \end{array}\right.$$
$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ b-a & = & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$
En résolvant le système (S) par substitution par exemple, on obtient $a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ et $b = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$
On obtient, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{5}})(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n + (\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{5}})(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
5. $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge -t-elle ? oui c'est une série exponentielle. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}}$ On reconnaît une série géométrique dérivée première de raison $\dfrac{1}{2}$. $|\dfrac{1}{2}| < 1$ donc la série converge et sa somme vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$. On obtient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 2$.

Exercice 2
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que la matrice P est inversible . On triangule P.

$$P \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} 2L_2 + 3L_1 -> L_2 \\ 2L_3 + L_1 -> L_3 \end{array}$$

P est équivalente par lignes à une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont non nuls donc P est inversible.

(b) Le calcul donne $P\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = I_3$ donc $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = P^{-1}$

(c) $A = PDP^{-1}$ donne $D = P^{-1}AP$ en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P. Le calcul donne D

2. (a) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. D est diagonale avec des éléments diagonaux non nuls donc D est inversible.

(b) A est inversible car deux matrices semblables ont le même rang.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut montrer par une récurrence immédiate que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $A^n = PD^nP^{-1}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 2 \times 3^n - \frac{5^n}{2} & -1 + 3^n & 3^n - 5^n \\ \frac{3}{4} - 3^n + \frac{5^n}{4} & \frac{3}{2} - \frac{3^n}{2} & -\frac{3^n}{2} + \frac{5^n}{2} \\ \frac{1}{4} - 3^n + \frac{3 \times 5^n}{4} & \frac{1}{2} - \frac{3^n}{2} & -\frac{3^n}{2} + \frac{3 \times 5^n}{2} \end{pmatrix}$$

4. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies par :$a_1 = 1$, $b_1 = 2$ et $c_1 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} a_{n+1} = & 3a_n + 2b_n - 2c_n \\ b_{n+1} = & -a_n + c_n \\ c_{n+1} = & a_n - b_n + 6c_n \end{cases}$$

En notant $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ On obtient $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = AV_n$ et on montre par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = A^{n-1}V_1$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = -\frac{5}{2} + 5 \times 3^{n-1} - \frac{3 \times 5^{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{15}{4} - \frac{5 \times 3^{n-1}}{2} + \frac{3 \times 5^{n-1}}{4}$ et $c_n = \frac{5}{4} - \frac{5}{2} \times 3^{n-1} + \frac{9 \times 5^{n-1}}{4}$.

Exercice 3

Voir cours. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $rg(M) = 2$ car M est triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux non nuls. M est donc inversible. Pour calculer son inverse, on peut appliquer la formule qui donne l'inverse pour les matrices de rang 2 (à connaître) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ soit A_k : on n'obtient que des faces jusqu'au k-ième lancer.
$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$$
.
$(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d"événements. (si on n'obtient que des faces jusqu'au $k+1$ième lancer, c'est qu'on n'a obtenu que des faces jusqu'au k-ième) D'après le théorème de limites monotone, $P(A) = \lim_{k\to+\infty} P(A_k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^k} = 0$ donc A est quasi-impossible.
2. Soit k un entier naturel non nul, soit P_k : on obtient pile pour la première fois au rang k. $P(B_k) = P(A_{k-1} \cap P_k) = \frac{1}{2^k}$.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir PILE pour la deuxième fois.
   (a) $X(\Omega) = [\![2 : n]\!]$.
   (b) $P(X=2) = P(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{4}$ et $P(X=3) = P(P_1 \cap \bar{P_2} \cap P_3) + P(\bar{P_1} \cap P_2 \cap P_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
   (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 3, $P(X=k) = \sum_{j=1}^{k-1} P(B_j \cap (X=k))$.
   (d) $P(X=k) = \sum_{j=1}^{k-1} P(B_j \cap [X=k]) = \sum_{j=1}^{k-1} q^{k-2}p^2 = (k-1)q^{k-2}p^2$.
   (e) $S = \sum_{k\in X(\Omega)} P(X=k) = \sum_{k\in X(\Omega)} (k-1)q^{k-2}p^2 = p^2 \sum_{k\geq 2} (k-1)q^{k-2}$ Un changement d'indice $k' = k-1$ donne $S = p^2 \sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ On reconnaît alors une série géométrique dérivée première, ce qui donne $S = p^2 \frac{1}{(1-q)^2} = 1$. C'est cohérent car les événements $(X=k)_{k\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évenements.
4. Pour savoir si X a une espérance, on étudie la convergence de $\sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$.
$$\sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k) = \sum_{k\in X(\Omega)} (k-1)kq^{k-2}p^2 = p^2 \sum_{k\in X(\Omega)} (k-1)kq^{k-2}.$$
On a une série géométrique dérivée seconde de raison $|q| < 1$ donc elle converge donc X admet une espérance et on a $E(X) = p^2 \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}$.

Exercice 5
Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'application linéaire qui à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur $u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ La $j$ième colonne s'obtient en exprimant $u(e_j)$ dans la base (e_1, e_2, e_3)

2.
$$ker(u - Id) = \{x \in \mathbb{R}^3 | (u - Id)(x) = 0_E\}$$
$$ker(u - Id) = \{x \in \mathbb{R}^3 | (u - Id)(x) = 0_E\}$$
$$ker(u - Id) = \{x \in \mathbb{R}^3 | u(x) = x\}$$

$$ker(u - Id) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3) = (x_1, x_2, x_3)\}$$

$$ker(u - Id) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (-x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 2x_3) = (0, 0, 0)\}$$

$$ker(u - Id) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{lll} -x_1 & +x_2 - 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 + 4x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 + 2x_3 & = 0 \end{array} \right. \}$$

$$ker(u - Id) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | - x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$$

$$ker(u - Id) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 - 2x_3\}$$

$$ker(u - Id) = \{(x_2 - 2x_3, x_2, x_3) | (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$ker(u - Id) = \{x_2(1, 1, 0) + x_3(-2, 0, 1) | (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$ker(u - Id) = \{x_2(1, 1, 0) + x_3(-2, 0, 1) | (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$ker(u - Id) = Vect((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$$

La famille $((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ est donc génératrice de $ker(u - Id)$.

Les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$ n'étant pas colinéaires, la famille $((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ est une famille libre donc une base de $ker(u - Id)$.

Donc on peut prendre $a = (1, 1, 0)$ et $b = (-2, 0, 1)$

3. $ker(u) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3) = (0, 0, 0)\}$

$$ker(u - Id) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{lll} & x_2 - 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 + 4x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 + 3x_3 & = 0 \end{array} \right. \}$$

$$ker(u - Id) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{lll} 2x_1 & -x_2 + 4x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 + 3x_3 & = 0 \\ & x_2 - 2x_3 & = 0 \end{array} \right. \}$$

$$ker(u - Id) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & -x_2 + 4x_3 & = 0 & \\ & -x_2 + 2x_3 & = 0 & 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ & x_2 - 2x_3 & = 0 & \end{array} \right. \}$$

$$ker(u-Id) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{lll} 2x_1 & -x_2+4x_3 & =0 \\ & -x_2+2x_3 & =0 \end{array} \right. \}$$

$$ker(u-Id) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{ll} 2x_1 = & x_2-4x_3 \\ x_2 = & 2x_3 \end{array} \right. \}$$

$$ker(u-Id) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = & -x_3 \\ x_2 = & 2x_3 \end{array} \right. \}$$

$$ker(u-Id) = \{(-x_3,2x_3,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$ker(u-Id) = \{x_3(-1,2,1) \in \mathbb{R}^3 | x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$ker(u-Id) = Vect((-1,2,1))$$

Donc on peut prendre $c = (-1,2,1)$

4. Montrons que la famille $((1,1,0),(-2,0,1),(-1,2,1))$ est libre.

   Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(-2,0,1)+\lambda_3(-1,2,1) = (0,0,0)$ alors $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ est solution du système suivant :

   $(S)\left\{ \begin{array}{llll} \lambda_1 & -2\lambda_2 & -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & & +2\lambda_3 = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 = 0 \end{array} \right.$

   $(S) \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \quad -2\lambda_2 \quad -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{array} \right.$

   $(S) \iff \left\{ \begin{array}{lll} \lambda_1 & -2\lambda_2 & -\lambda_3 = 0 \\ & & \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ & & \lambda_2 = -\lambda_3 \end{array} \right.$

   $(S) \iff (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0)$

   Le système (S) a pour seule solution la solution nulle donc la famille $((1,1,0),(-2,0,1),(-1,2,1))$ est libre. C'est donc une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc une base de $\mathbb{R}^3$.

5. On a $u((1,1,0)) = (1,1,0)$ $u((-2,0,1)) = (-2,0,1)$ et $u((-1,2,1)) = (0,0,0)$ donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Pour montrer que $Im(u) = ker(u-Id)$, on montre que $Ker(u-Id) \subset Im(u)$ et que $dim(Im(u)) = dim(Ker(u-Id))$.

   Soit $d \in Ker(u-Id)$ alors $u(d) = d$ donc $d \in Im(u)$ donc $Ker(u-Id) \subset Im(u)$

   $Im(u) = Vect(u(e_1),u(e_2),u(e_3)) = Vect((0,2,1),(1,-1,-1),(-2,4,3)) =$. Or $(-2,4,3) = -2(1,-1,-1)+(0,2,1)$ donc $Im(u) = Vect((0,2,1),(1,-1,-1))$ Les vecteurs $(0,2,1)$ et $(1,-1,-1)$ n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de vecteurs. On a donc $Im(u) = Vect((0,2,1),(1,-1,-1))$ donc $rang(u) = 2 = dim(Ker(u-Id))$.

   On a donc deux sous espaces vectoriels de même dimension dont l'un est inclus dans l'autre donc ils sont égaux.

7. u est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ comme application canoniquement associée à la matrice A donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ $rg(u) = 2$ donc u n'est pas un isomorphisme car elle n'est pas bijective

8. $rg(u) = 2$, $dim(Ker(u)) = 1$. $dim(\mathbb{R}^3) = 3$. On a donc $rg(u) + dim(Ker(u)) = 3$

Exercice 6

Soit $A = \{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que A est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   On a
   (a) $A \subset M_3(\mathbb{R})$
   (b) $\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ (il suffit de prendre $a = b = 0$)
   (c) Soit $(M, N, \lambda) \in A^2 \times \mathbb{R}$, $M \in A$ donc il existe $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & 0 \\ 0 & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & m_1 \end{pmatrix}$
   $N \in A$ donc il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 \\ 0 & 0 & n_1 \end{pmatrix}$.
   On a donc $M + \lambda N = \begin{pmatrix} m_1 + \lambda n_1 & m_2 + \lambda n_2 & 0 \\ 0 & m_1 + \lambda n_1 & m_2 + \lambda n_2 \\ 0 & 0 & m_1 + \lambda n_1 \end{pmatrix}$ donc $M + \lambda N \in A$ avec $a = m_1 + \lambda n_1$ et $b = m_2 + \lambda n_2$ Donc A est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

2. La base canonique de $M_3(\mathbb{R})$ comporte 9 vecteurs donc $dim(M_3(\mathbb{R})) = 9$.

3. $A = \{a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$. La famille $(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$ est donc génératrice de A. On peut montrer facilement qu'elle est libre donc elle forme une base de A. Donc A est de dimension 2.

Exercice 7

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé pour toute la suite de l'exercice.

Partie I

1. Soit $i \in [\![1; N]\!]$. On peut modéliser l'arrivée d'une voiture au péage par une expérience de Bernouilli de résultat 1 si la voiture choisit le couloir i et 0 si elle en choisit un autre. La probabilité du succès est $\frac{1}{N}$ puisqu'il y a N couloirs. Les voitures se présentant au péage choisissent leur couloir indépendamment les unes des autres. On a donc une répétition de r expériences aléatoires de Bernouilli indépendantes de probabilité de succès $\frac{1}{N}$ donc X_i suit la loi binomiale de paramètre r, $\frac{1}{N}$. Donc X_i a pour espérance $\frac{r}{N}$ et pour variance $\frac{r}{N}(1 - \frac{1}{N})$.

2. Soit $(i, j) \in [\![1; N]\!]^2$ tel que $i \neq j$,
$$P(X_i = r \cap X_j = r) = 0$$
$$P(X_i = r)P(X_j = r) = \frac{1}{N^r}\frac{1}{N^r}$$
Donc $P(X_i = r \cap X_j = r) \neq P(X_i = r)P(X_j = r)$ donc X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

3. $X_1 + X_2 + \ldots + X_N = r$, puisqu'il y a r voitures qui se présentent au péage. Une variable aléatoire constante a pour espérance elle même donc l'espérance vaut r et la variance vaut 0 (pas de dispersion si la variable aléatoire est constante...).

4. Soit $(i, j) \in [\![1; N]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi de $X_i + X_j$. Comme précédemment, on a la répétition r fois d'une expérience de Bernouilli de paramètre $\frac{2}{N}$ (on a un succès si la voiture choisit le couloir i ou le couloir j) donc $X_i + X_j$ suit la loi de binomiale de paramètre $r, \frac{2}{N}$. L'espérance de $X_i + X_j$ est donc $\frac{2r}{N}$ et la variance de $X_i + X_j$ est donc $\frac{2r}{N}(1 - \frac{2}{N})$.
   On peut retrouver ce résultat par le calcul en écrivant pour $k \in [\![1; r]\!]$
   $$P(X_i + X_j = k) = \sum_{l=1}^{k} P(X_i = l \cap X_j = k - l) = \sum_{l=1}^{k} \tbinom{r}{l}\frac{1}{N^l}\tbinom{r-l}{k-l}\frac{1}{N^{k-l}}(\frac{N-2}{N})^{r-k}$$
   $$P(X_i + X_j = k) = \tbinom{r}{k}\frac{1}{N^k}(\frac{N-2}{N})^{r-k}\sum_{l=1}^{k}\tbinom{k}{l}$$
   $$P(X_i + X_j = k) = \tbinom{r}{k}\frac{1}{N^k}(\frac{N-2}{N})^{r-k}2^k$$
   pour trouver $X_i = l \cap X_j = k - l$: on a l voitures qui choisissent le couloir i avec la probabilité $\frac{1}{N}$ et $\tbinom{r}{l}$ façons de choisir leur 'rang' parmi les r voitures qui arrivent. On a ensuite $k - l$ voitures parmi les $r - l$ restantes qui choisissent le couloir j avec la probabilité $\frac{1}{N}$. Il reste ensuite $r - k$ voitures qui ne choisissent ni le couloir i, ni le couloir j avec la probabilité $\frac{N-2}{N}$
   (b) $cov(X_i, X_j) = \frac{V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)}{2}$ soit $cov(X_i, X_j) = \frac{\frac{2r}{N}(1 - \frac{2}{N}) - 2\frac{r}{N}(1 - \frac{1}{N})}{2}$.
   Le coefficient de corrélation linéaire vaut $\frac{cov(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}}$ où $\sigma_{X_i} = \sigma_{X_j} = \sqrt{V(X_i)}$ donc $\sigma_{X_i}\sigma_{X_j} = \frac{r}{N}(1 - \frac{1}{N})$. On obtient $cov(X_i, X_j) = \frac{1 - \frac{2}{N}}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{N-2}{N-1}$

5. (a) Soit $i \in [\![1; N]\!]$. Y_i suit la loi de Bernouilli de paramètre $P(Y_i = 1)$.
   $$P(Y_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - (1 - \frac{1}{N})^r$$
   et $E(Y_i) = P(Y_i = 1) = 1 - (1 - \frac{1}{N})^r$

(b) $T = \sum_{i=1}^{N} Y_i$.

(c) $E(T) = \sum_{i=1}^{N} E(Y_i)$ par linéarité de l'espérance. Donc $E(T) = N(1-(1-\frac{1}{N})^r))$

Partie II

Soit λ un réel strictement positif fixé.

1. (a) Soit n un entier naturel fixé. $P_{Z=n}(X=k) = \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}(1-\frac{1}{N})^{n-k}$. (Même raisonnement qu'à la question 1.1 avec $r = n$)

   (b) La famille d'événements $([Z=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne

$$P(X=k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(Z=n\cap X=k)$$

Si $k > n$, $[Z=n\cap X=k] = \emptyset$: si moins de k voitures arrivent, il ne peut pas y en avoir k qui choisissent le premier couloir !

$$P(X=k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_{Z=n}(X=k)P(Z=n)$$

$$P(X=k) = \sum_{n\geq k}\binom{n}{k}\frac{1}{N^k}(1-\frac{1}{N})^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{1}{N^k}(1-\frac{1}{N})^{-k}\sum_{n\geq k}\frac{n!}{k!(n-k)!}(1-\frac{1}{N})^n\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{1}{N^k k!}(1-\frac{1}{N})^{-k}\sum_{n\geq k}\frac{1}{(n-k)!}(1-\frac{1}{N})^n\lambda^n$$

On effectue un changement d'indice $n' = n-k$ et on renomme k' par k on obtient :

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{1}{N^k k!}(1-\frac{1}{N})^{-k}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{N})^{n+k}\lambda^{n+k}$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{1}{N^k k!}(1-\frac{1}{N})^{-k}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{N})^{n+k}\lambda^{n+k}$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{1}{N^k k!}(1-\frac{1}{N})^{-k}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{N})^{n+k}\lambda^{n+k}$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{1}{N^k k!}(1-\frac{1}{N})^{-k}(1-\frac{1}{N})^k\lambda^k\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{N})^n\lambda^n$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{1}{N^k k!}(1-\frac{1}{N})^{-k}(1-\frac{1}{N})^k\lambda^k e^{\lambda(1-\frac{1}{N})}$$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{N^k k!}e^{-\frac{\lambda}{N}}$$

Donc X suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{N}$.

2. (a) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i \cap Z = i + j) = P_{Z=i+j}(X = i)P(Z = i + j)$$

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \binom{i+j}{i}\frac{1}{N^i}(1 - \frac{1}{N})^j e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{i+j}}{(i + j)!}$$

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{(i + j)!}{i!j!}\frac{1}{N^i}(1 - \frac{1}{N})^j e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{i+j}}{(i + j)!}$$

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{i+j}\ (N - 1)^j}{i!\ j!\ N^{i+j}}$$

(b) La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X = i])_{i\in\mathbb{N}}$ donne :

$$P(Y = j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P([X = i] \cap [Y = j])$$

$$P(Y = j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j\ (N - 1)^j}{j!\ N^j}\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{\lambda^i}{i!\ N^i}$$

$$P(Y = j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j\ (N - 1)^j}{j!\ N^j}e^{\frac{\lambda}{N}}$$

Donc Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1 - \frac{1}{N})$

(c) $P(X = i)P(Y = j) = \frac{\lambda^i}{N^i i!}e^{-\frac{\lambda}{N}} \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^j\ (N - 1)^j}{j!\ N^j}e^{\frac{\lambda}{N}} = P(X = i \cap Y = j)$ donc X et Y sont indépendantes.

(d) $cov(X, Z) = cov(X, X + Y) = cov(X, X) + cov(X, Y)$ par linéarité à droite de la covariance. X et Y étant indépendantes, on a $cov(X, Y) = 0$ donc $cov(X, Z) = cov(X, X) = V(X) = \frac{\lambda}{N}$