

1 Thèmes

1. Polynômes, divisions euclidiennes simple, formule de Taylor pour les polynômes, lien racines factorisation, multiplicité des racines, étude des extrema des polynômes
2. Sommes directes, sous espaces supplémentaires, projections, symétries

2 Questions de cours

1. Démonstration de : Un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle
2. Un polynôme P admet un extremum local en a si et seulement si a est une racine de P' de multiplicité impaire. Démonstration par la formule de Taylor dans le cas où cette multiplicité vaut 1...
3. Démonstration de la formule de Grassmann
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$
 - (a) Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$. En déduire A^{-1}
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I$
 - (c) Montrer que u vérifie une relation linéaire d'ordre 2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}, u_n$ en fonction de n . En déduire une expression de u_n en fonction de n
5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$
 - (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$
 - (b) F et G sont-ils supplémentaires ?
6. Factoriser le polynôme $X^6 - 4X^4 + X^2 + 6$.
On pourra poser $Y = X^2$ et chercher les racines évidentes du polynôme en Y obtenu.
7. Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 2f - 3Id_E = 0$.
 - (a) Montrer que $Im(f - 3Id_E) \subset Ker(f + Id_E)$ et $Im(f + Id_E) \subset Ker(f - 3Id_E)$
 - (b) Trouver 2 réels α et β tels que pour tout vecteur x de E :
$$x = \alpha(f + Id_E)(x) + \beta(f - 3Id_E)(x)$$
 - (c) En déduire que
$$E = Ker(f - 3Id_E) \oplus Ker(f + Id_E)$$
8. Soit $P = X^4 + 4X^3 + mX^2 + nX + 2$. Déterminer m et n pour que -1 soit racine double de P .